

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# نظریه تقریب

از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها

اُل کریستیانسن  
خدیجه کریستیانسن

ترجمه

دکتر غلامرضا حاجتی

دکتر حسین خیری

دکتر اصغر رحیمی

دکتر صداقت شهراد

کریستیانسن، ال، ۱۹۶۶-م. Christensen, Ole  
 نظریه تقریب، از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها / ال کریستیانسن، خدیجه  
 کریستیانسن؛ ترجمه غلامرضا حجتی ... [و دیگران]- مراغه: دانشگاه مراغه، ۱۳۸۹.  
 خ، ۱۸۵ ص. : مصور، نمودار- (انتشارات دانشگاه مراغه)  
 ISBN 978-600-91571-1-2  
 فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.  
 عنوان اصلی:  
 APPROXIMATION THEORY  
 FROM TAYLOR POLYNOMIALS TO WAVELETS, 2004.  
 نظریه تقریب، کریستیانسن، خدیجه لاگریدا، ۱۹۶۳-م.  
 Christensen, Khadija L. (Khadija Laghrida)  
 حجتی، غلامرضا، ۱۳۵۲-، مترجم.  
 واژه‌نامه.  
 چاپ اول: ۱۳۸۹.  
 QA۲۲۱/ک۴ن۶  
 کتابخانه ملی ایران  
 ۵۱۱/۴  
 ۱۹۹۲۶۲۹

نام کتاب	نظریه تقریب، از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها
مؤلف	ال کریستیانسن، خدیجه کریستیانسن
مترجم	دکتر غلامرضا حجتی، دکتر حسین خیری، دکتر اصغر رحیمی، دکتر صداقت شهمراد
طراح جلد و صفحه‌آرا	وحید دامن‌افشان
ناشر	انتشارات دانشگاه مراغه، مراغه
نوبت چاپ	اول ۱۳۸۹
شمارگان	۱۵۰۰ جلد
قطع	وزیری
قیمت	۴۰۰۰ تومان

حق چاپ برای انتشارات دانشگاه مراغه، محفوظ است.

## پیشگفتار مترجمین

امروزه پیشرفت علوم کامپیوتر و به تبع آن پیشرفت‌های ریاضات کاربردی موجب گردیده گرایش به مباحث علمی تقریب، از قبیل نظریه تقریب و محاسبات تقریبی به دلیل کاربردهای فراوان آنها در رشته‌های علوم پایه و مهندسی، گسترش یابد. متأسفانه منبع درسی مناسبی به زبان فارسی، که بتواند علاقمندان را با مفاهیم و اصول نظریه تقریب آشنا کند، در دسترس نیست. مترجمین کتاب حاضر از چند سال پیش بر آن بودند تا کتابی در این زمینه به همراه مفاهیم جدید نظریه تقریب، بویژه نظریه موجک‌ها، به دانشجویان علوم پایه و مهندسی ارائه نمایند؛ تا اینکه با انجام جستجوهای با کتابی آشنا شدیم که مناسب نظر ما بود؛ یعنی کتابی با عنوان «نظریه تقریب، از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها».

این کتاب شامل موضوعات نظریه تقریب از قدیمی‌ترین مطالب آن، شامل چند جمله‌ای‌های تیلور و قضیه وایرشتراس، تا جدیدترین آنها، شامل نظریه موجک و نظریه قاب‌ها می‌باشد. امید است ترجمه این کتاب بتواند خوانندگان علاقمند را به سوی پیشرفت در یکی از زیباترین شاخه‌های ریاضیات، یعنی نظریه تقریب و کاربردهای آن، رهنمون سازد.

مترجمین این کتاب متواضعانه پذیرای انتقادات و پیشنهادهای همه اساتید و دانشجویان در این ترجمه هستند. در پایان لازم می‌دانیم از آقای وحید دامن‌افشان، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه تبریز، به خاطر آماده‌سازی کتاب با استفاده از نرم‌افزار X<sub>Y</sub>Persian، تشکر کنیم. همچنین از انتشارات دانشگاه مراغه که مقدمات چاپ این کتاب را فراهم آوردند، صمیمانه قدردانی می‌کنیم.

دکتر اصغر رحیمی

دانشکده علوم پایه - دانشگاه مراغه

دکتر غلامرضا حاجتی، دکتر حسین خیری، دکتر صداقت شهمراد

دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه تبریز

بهمن ماه ۱۳۸۸



## مقدمه

این کتاب معرفی مقدماتی بر مبحث کلاسیک نظریه تقریب در ریاضیات بوده چنانچه به مبحث جدید موجک‌ها منجر می‌شود. هدف رفتاری در این کتاب بر مبنای تقریب «عبارات پیچیده» با «عبارات ساده‌تر» است که نقش اساسی در بسیاری از زمینه‌های ریاضیات مدرن و کاربردهای آن دارد. یکی از اهداف اصلی ارائه این کتاب، تفهیم این موضوع به خواننده است که ریاضیات موضوعی با سیر تکاملی پیوسته است. تفهیم این واقعیت برای دانشجویان سال دوم دانشگاه معمولاً مشکل است.

اغلب، معلمان ابزار اولیه کافی برای ایجاد انگیزه و تشویق دانشجویان برای مطالعات بعدی ندارند. کتاب حاضر کاربردی در این مضمون دارد زیرا به بیان طبیعت دینامیکی ریاضیات و چگونگی تأثیر نظم کلاسیک موضوعات ریاضیات و کاربردهای آن می‌پردازد. این کتاب ممکن است با معرفی نظریات ارائه شده در چندین کتاب با متن ساده، خواننده را به سمت ادبیات پیشرفته‌تر، همانند دیگر آثار «آنالیز عددی کاربردی و هارمونیک» هدایت کند.

در اینجا توجه ما بیشتر روی جزئیات فنی بوده و کتاب اصولاً یک کتاب سطح متوسط نیست. اما می‌توان آن را بعنوان متن درسی سری‌های نامتناهی و سری فوریه بکار برد که در آنها ایده‌ها و انگیزه‌ها مهمتر از اثبات می‌باشد. در این دروس، طبیعی است که از دو فصل مربوط به موجک بعنوان مسیری جهت رسیدن به تحقیقات اخیر و بعنوان زمینه‌ای برای مطالعات بیشتر استفاده کرد. هدف از این دو فصل، معرفی موجک‌ها بعنوان تعمیم از ساختار فصل‌های قبلی است. در اینجا بررسی کامل مد نظر نبوده و به همین دلیل تعداد تمرینهای کمتری در فصل مربوط به موجک نسبت به تعداد تمرینهای در سه فصل اول آمده است.

فصل اول در خصوص تقریب با چند جمله‌ای‌ها، بسیار مقدماتی بوده و حتی برای دانش‌آموزان دبیرستان قابل فهم است (البته اثبات‌ها ممکن است نیاز به پیش زمینه بیشتری از ریاضیات داشته باشند). به علاوه، این فصل مقدماتی در خصوص بقیه مطالب کتاب ایده کلی به خواننده می‌دهد.

فصل بعدی، در مورد سری‌های نامتناهی، با تاکید زیاد روی مفاهیم نظریه تقریب از بحث مقدماتی فاصله می‌گیرد. همچنین، این فصل با تکمیل نواقص دروس مقدماتی دانشگاهی به موضوع جدید می‌پردازد که شامل چندین مثال و ساختار (کلاسیک) سرگرم کننده است که به ندرت در کلاس‌های درس به آن اشاره می‌شود.

آنالیز موجک را می‌توان به عنوان مکمل جدیدی از آنالیز سری فوریه کلاسیک در نظر گرفت

و به این دلیل معرفی کاملی از سری فوریه را در فصل سوم آورده‌ایم. در این فصل روی مفاهیمی تمرکز می‌کنیم که در نظریه موجک نیز مطرح می‌گردد به عنوان مثال، خواص تقریب و تاثیر خواص یک تابع روی ضرائب بسط آن بحث می‌گردد.

فصل‌های ۴ و ۵ موجک‌ها و خواص آنها را بررسی می‌کند. فصل ۴ بیشتر به تشریح موجک می‌پردازد تا نمادهای آن، اما به خواننده درکی از سوالات و مفاهیم می‌دهد. این فصل همچنین در خصوص داستان پیدایش موجک و کاربردهای آن در زمینه سیگنال صحبت می‌کند. فصل ۵ قدری تکنیکی‌تر است، اما با استفاده از اطلاعات فصل‌های قبلی قابل فهم می‌باشد. بخش اصلی این فصل بخش ۴.۵ است که نمایش چند منظوره متناظر با موجک‌های خاص از دسته موجک‌ها را تشریح می‌کند. در نهایت، پیوست الف شامل اثبات برخی نتایج انتخاب شده و پیوست ب شامل برخی سری‌های مهم توانی و فوریه است.

لیست مراجع شامل کتاب‌ها و مقالات در چند سطح آمده است. جهت متمرکز بودن، ساختار ترتیبی زیر را در نظر گرفته‌ایم:

(A) مقدماتی؛ (B) در سطح دانشجویان کارشناسی؛ (C) در سطح فارغ‌التحصیلان؛ (D) مقاله تحقیقی؛ (H) مقاله تاریخی.

ترتیب متناظر با مطالب کتاب نیز بصورت زیر است:

(A): فصل ۱؛

(A-B): فصل ۲، فصل ۴، پیوست؛

(B): فصل ۳، فصل ۵.

مطالب سری‌های نامتناهی برگرفته شده از یادداشت‌های مورد استفاده در دانشگاه فنی دانمارک است. در نسخه اصلی آن، این مفاهیم توسط اچ. جانسون نوشته شده است. در ویرایش‌های بعدی آن چندین پروفیسور حضور داشته‌اند. برخی از مثال‌های ما از این یادداشت‌ها برداشته شده است.

از ریاضیدانانی که در نگارش این کتاب ما را همراهی کرده‌اند، تشکر می‌کنیم: پ. آلسولم و ا. جرسب به خاطر مطالعه دست نوشته‌ها و رفع ایرادات آن؛ پ. هانسون و ت. جانسون به خاطر کمک در تهیه نمودارها؛ پ. جرجنسون و ج. لموینگ به خاطر پیشنهادات مفیدشان؛ ا. کهن و م. ویکرهاوسر به خاطر تهیه شکل‌های خاص. همچنین از ج. بندت، ویراستار نشریه ANHA، به خاطر پیشنهاد تألیف این کتاب و ح. فیشینگر به خاطر تهیه لوازم اداری در طی مدت طولانی اقامت ما در وین سپاسگزاری می‌کنیم. در پایان از کادر بیرهاوسر، بویژه ت. گراسو برای کمک‌های ویراستاری مؤثرش و ا. لائو که در رفع مشکلات لاتکس ما را همراهی کرد، تشکر می‌کنیم. نویسنده اول کتاب از حمایت برنامه WAVE تحت پوشش سازمان علوم دانمارک سپاسگزاری می‌نماید.

آل کریستیانسن

خدیجه کریستیانسن

لونگ بی، دانمارک

ژانویه ۲۰۰۴

# فهرست مطالب

پ	پیشگفتار مترجمین
ث	مقدمه
۱	۱ تقریب با چند جمله‌ای‌ها
۲	۱.۱ تقریب یک تابع روی یک بازه
۴	۲.۱ قضیه وایرستراس
۶	۳.۱ قضیه تیلور
۱۴	۴.۱ تمرینها
۱۷	۲ سری‌های نامتناهی
۱۸	۱.۲ سری‌های نامتناهی از اعداد
۲۴	۲.۲ تخمین جمع یک سری نامتناهی
۲۷	۳.۲ سری‌های هندسی
۳۰	۴.۲ سری‌های توانی
۳۸	۵.۲ جمع نامتناهی عمومی از توابع
۴۵	۶.۲ همگرایی یکنواخت
۴۹	۷.۲ انتقال سیگنال
۵۳	۸.۲ تمرینها
۵۷	۳ آنالیز فوریه
۵۸	۱.۳ سری فوریه
۶۳	۲.۳ قضیه فوریه و تقریب
۶۸	۳.۳ سری فوریه و آنالیز سیگنال
۷۰	۴.۳ سری فوریه و فضاهاى هیلبرت
۷۴	۵.۳ سری فوریه در شکل مختلط
۷۶	۶.۳ قضیه پارسوال

ح فهرست مطالب

۷۸	منظم بودن و میرائی ضرائب فوريه	۷.۳
۸۰	بهترین تقریب $N$ -جمله‌ای	۸.۳
۸۳	تبدیل فوريه	۹.۳
۸۷	تمرینها	۱۰.۳
۹۱	<b>۴ موجک‌ها و کاربردهای آن</b>	
۹۲	دستگاه‌های موجک	۱.۴
۱۰۰	موجک‌ها و انتقال سیگنال	۲.۴
۱۰۷	موجک‌ها و اثر انگشت	۳.۴
۱۱۰	بسته‌های موجکی	۴.۴
۱۱۲	موجک‌های دیگر: دستگاه‌های گابور	۵.۴
۱۱۳	تمرینها	۶.۴
۱۱۵	<b>۵ موجک‌ها و خواص ریاضی آنها</b>	
۱۱۶	موجک‌ها و $L^2(\mathbb{R})$	۱.۵
۱۱۷	آنالیز چند ریزه‌ساز	۲.۵
۱۱۸	نقش تبدیل فوريه	۳.۵
۱۱۹	موجک‌ها	۴.۵
۱۳۳	نقش محمل فشرده	۵.۵
۱۳۴	موجک‌ها و تکین‌ها	۶.۵
۱۳۸	بهترین تقریب $N$ -جمله‌ای	۷.۵
۱۴۱	قاب‌ها	۸.۵
۱۴۴	سیستم‌های گابوری	۹.۵
۱۴۹	تمرینها	۱۰.۵
۱۵۱	<b>الف پیوست الف</b>	
۱۵۱	الف. تعاریف و نمادها	۱.الف
۱۵۲	الف. اثبات قضیه وایرستراس	۲.الف
۱۵۶	الف. اثبات قضیه تیلور	۳.الف
۱۶۰	الف. سری‌های نامتناهی	۴.الف
۱۶۲	الف. اثبات قضیه ۲.۷.۳	۵.الف
۱۶۵	<b>ب پیوست ب</b>	
۱۶۵	ب. سری‌های توانی	۱.ب
۱۶۶	ب. سری‌های فوريه برای توابع $2\pi$ -متناوب	۲.ب
۱۶۷	<b>پ پیوست پ</b>	
۱۶۷	پ. سری‌های فوريه برای توابع $T$ -متناوب	۱.پ



فهرست مطالب خ

۱۶۹	ت پیوست ت
۱۶۹	ت.۱ روش فوریه
۱۷۵	مراجع
۱۷۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۸۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۸۴	نمایه

با نگاهی به شکل‌های ۱.۳.۴-۲.۳.۴ موضعی بودن نمایش موجکی، این معنی را می‌دهد که ما اختیار داشتیم ضرایب بیشتری در اطراف مسیر سگ بکار ببریم به طوری که در اینجا یک رزولوشن واضح بدست آوردیم و ضرایب کمتر در طرف درونی بالش‌ها که در آن‌ها دقت و وضوح ضعیف‌تر هنوز تصویر خوب ارائه می‌دهد.

## ۵.۵ نقش محمل فشرده

تکنیک‌های زندگی واقعی، سیگنال‌های دائمی را نمی‌توانند بررسی کنند: برای اینکه قادر به بررسی یک سیگنال باشیم، باید یک دوره زمانی متناهی داشته باشیم. همین محدودیت برای تمام توابعی که در آنالیز موجکی ظاهر می‌شوند، به کار می‌رود و این در عمل به این معنی است که ما علاقه مندیم موجک  $\psi$  دارای محمل فشرده باشد. تاکنون اصطلاح محمل فشرده را، فقط به مفهوم تابعی معرفی کردیم که خارج یک بازه بسته و کراندار در  $\mathbb{R}$  صفر است. معنی دقیق کلمه محمل برای یک تابع  $f$  عبارت است از:

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}},$$

که در آن خط بالای مجموعه به معنی بستار است. بنابراین اساساً محمل، مجموعه  $x$ ‌هایی است که به ازای آن  $f(x) \neq 0$ ؛ اما با برخی نقاط اضافی، برای اینکه یک مجموعه بسته به دست آوریم. محمل فشرده  $\psi$  به خاصیت خوب دیگری از نمایش موجکی اطلاق می‌شود که متفاوت از آن چیزی است که ما از آنالیز فوریه می‌دانیم. فرض کنید موجک  $\psi$  دارای محملی روی بازه  $[0, M]$  به ازای  $M \in \mathbb{N}$  باشد در این صورت:

$$\text{supp } \psi_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+M)]$$

حال به ازای سیگنال معین  $f$  به نمایش اساسی در (۳.۴) برمی‌گردیم، یعنی

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (24.5)$$

با

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx.$$

اطلاعات ما از محمل  $\psi_{j,k}$  نتیجه می‌دهد

$$c_{j,k} = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+M)} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx.$$

یعنی ضرایب  $c_{j,k}$  فقط به رفتار  $f$  روی بازه  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+M)]$  بستگی دارد. به عبارت دیگر، ضرایب  $c_{j,k}$  شامل اطلاعات موضعی در مورد تابع تحلیل شده  $f$  است. اگر تابع  $f$  را روی یک بازه کوچک مثلا  $[0, 1]$  تغییر دهیم، بیشتر ضرایب  $c_{j,k}$  بدون تغییر باقی می‌مانند؛ فقط ضرایب جدید را برای مقادیری از  $j, k \in \mathbb{Z}$  بدست می‌آوریم که به ازای آنها

$$[0, 1] \cap [2^{-j}k, 2^{-j}(k+M)] \neq \emptyset.$$

این خاصیت خیلی متفاوت از آن چیزی است که بوسیله آنالیز فوریه بدست می‌آوریم. به عنوان مثال تبدیل فوریه تابع  $f$  به صورت یک انتگرال روی  $\mathbb{R}$  تعریف می‌شود. در حالت کلی، در مورد تغییر کوچک تابع چیزی وجود ندارد، در نتیجه همه مقادیر تابعی  $\hat{f}$  تغییر خواهند کرد. همین وضعیت با ضرایب فوریه برای یک تابع متناوب هم هست: یک پریشیدگی کوچک دلخواه از یک تابع در حالت کلی همه ضرایب فوریه را تغییر می‌دهد.

## ۶.۵ موجک‌ها و تکین‌ها

موجک‌ها در بیشتر زمینه‌ها برای تحلیل توابع بسیار مناسب هستند. به طور دقیق‌تر اگر  $\psi$  یک موجک باشد، آنگاه اطلاعات مهم در مورد تابع معین  $f$  می‌تواند از اطلاعات ضرایب

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx \quad (25.5)$$

در (۲۴.۵) استخراج شود. مثالی از این نوع در [۳۰] ارائه می‌شود، که در آن والنات نشان می‌دهد چگونه ناپیوستگی یک تابع در نقطه‌ای در ضرایب  $\{c_{j,k}\}$  منعکس می‌شود.

مثال ۱.۶.۵ فرض کنید  $\psi$  موجک هار باشد. فرض کنید  $x_0 \in (0, 1)$  و  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی است که روی بازه‌های  $[0, x_0]$  و  $(x_0, 1]$  دو بار مشتق پذیر است. همچنین فرض کنید

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

و

$$f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

موجود هستند. در ادامه  $f$  را تابعی در نظر می‌گیریم که روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده و به ازای  $f(x) = 0, x \notin [0, 1]$  حال ضرایب  $c_{j,k}$  در (۲۵.۵) را در نظر می‌گیریم: چون محمل  $\psi_{j,k}$  بازه  $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$  است ضرایب  $c_{j,k}$  می‌تواند مخالف صفر باشد فقط اگر

$$[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)] \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

## مراجع

- [1] (D) J. Berger and C. Nichols: *Brahms at the piano*. Leonardo Music Journal 4 (1994), 23-30.
- [2] (B) C. M. Brislawn: *Fingerprints go digital*. Notices of the Amer. Math. Soc. 42 no. 11 (1995), 1278-1283.
- [3] (C) O. Christensen: *An introduction to frames and Riesz bases*. Birkhauser Boston, 2003.
- [4] (A-B) O. Christensen and K. Laghrida Christensen: *Linear independence in function spaces*. Normat 51 (2003), 2-14.
- [5] (D) A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau: *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*. Comm. Pure Appl. Math. (1993), 485-560.
- [6] (D) C. Chui, W. He, and J. Stockler: *Compactly supported tight and sibling frames with maximum vanishing moments*. Appl. Compo Harm. Anal. 13 no. 3 (2002), 224-262.
- [7] (B) J. Conway: *One complex variable*. Springer, 1985.
- [8] (C) I. Daubechies: *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [9] (D) I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer: *Painless nonorthogonal expansions*. J. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.
- [10] (D) I. Daubechies and B. Han: *The canonical dual of a wavelet frame*. Appl. Compo Harm. Anal. 12 no. 3 (2002), 269-285.
- [11] (D) I. Daubechies, B. Han, A. Ron, and Z. Shen: *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames*. Appl. Compo Harm. Anal. 14 (2003), 1-46.
- [12] (H) R. J. Duffin and A. C. Schaeffer: *A class of nonharmonic Fourier series*. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952) 341-366.
- [13] (H) J. Fourier: *The analytical theory of heat*. Dover, New York. This is a translation of Fourier's original article *Theorie analytique de La chaleur*, published in Paris by Didot, 1822.

- [14] (D) A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul: *Transforms associated to square integrable group representations I*. J. Math. Phys. 26 no. 10 (1985), 2473- 2479.
- [15] (C) K. Grochenig: *Foundations of time-frequency analysis*. Birkhauser, Boston, 2000.
- [16] (H) A. Haar: *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme*. Math. Ann. 69 (1910), 331-371.
- [17] (D) C. Heil, J. Ramanathan, and P. Topiwala: *Linear independence of timefrequency translates*. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 2787-2795.
- [18] (C) E. Hernandez and G. Weiss: *A first course on wavelets*. CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [19] (A-B) B. B. Hubbard: *The world according to wavelets: The story of a mathematical technique in the making*. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.
- [20] (C-D) S. Jaffard and Y. Meyer: *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*. Mem. Amer. Math. Soc. 123 no. 587. AMS, Providence, RI, 1996.
- [21] (C) S. Jaffard, Y. Meyer, and R. Ryan: *Wavelets; Tools for science & technology*. SIAM Philadelphia 2001.
- [22] (B) A. Jensen and A. la Cour-Harbo: *Ripples in mathematics*. Springer Verlag Berlin, 2001.
- [23] (B) E. W. Kamen and B. S. Heck: *Fundamentals of signals and systems using the web and Matlab*. Prentice Hall New Jersey, 2000.
- [24] (D) P. Linnell: *Von Neumann algebras and linear independence of translates*. Proc. Amer. Math. Soc. 127 no. 11 (1999), 3269-3277.
- [25] (C) S. Mallat: *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [26] (C) Y. Meyer: *Wavelets and operators*. Cambridge University Press 1992.
- [27] (B-C) W. Rudin: *Real and complex analysis*. McGraw Hill, 1966.
- [28] (C) R. Young: *An introduction to nonharmonic Fourier series*. Academic Press, New York, 1980 (revised first edition 2001).
- [29] (B-C) M. Vetterli, and J. Kovacevic: *Wavelets and subband coding*. Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall 1995.
- [30] (B-C) D. Walnut: *An introduction to wavelet analysis*. Birkhauser, Boston, 2001.
- [31] (B-C) M. V. Wickerhauser: *Adapted wavelet analysis from theory to software*. A. K. Peters, Ltd., 1993.

## نمایه

- آزمون  $M$ -وایراشتراس، ۴۸  
آزمون انتگرال، ۲۴  
آزمون جمله  $m$ ، ۲۱  
آزمون خارج قسمت، ۲۳  
آزمون مقایسه، ۲۱  
آنالیز چند ریزه‌ساز، ۱۱۷
- اسپلین، ۹۷  
اصل گیسس، ۶۰  
انتقال سیگنال، ۴۹
- بازسازی، ۱۰۴  
بسته‌های موجکی، ۱۱۲  
بطور تکه‌ای مشتق پذیر، ۶۴  
به طور نمائی کاهش پیدا کردن، ۹۸  
بهترین تقریب  $N$ -جمله‌ای، ۵۰
- پایه ریس، ۱۴۲  
پایه گابوری، ۱۴۸  
پایه متعامد یکه، ۷۰  
پیکسل، ۱۰۳، ۱۰۷  
پیوستگی یکنواخت، ۱۵۲
- تابع پله‌ای، ۵۹  
تابع پیوسته، ۱۵۲  
تابع تبدیل، ۱۷۰  
تابع جمع، ۳۸  
تابع گاوسی، ۱۴۸  
تبدیل فوریه، ۸۴  
تبدیل موجک، ۱۱۸
- تبدیل موجکی گسسته، ۱۰۳  
تقریب غیر خطی، ۸۱  
تقریب یکنواخت، ۳  
توابع هار، ۱۱۹  
جمع جزئی، ۱۸  
جواب، ۱۶۹
- چند جمله‌ای تیلور، ۸  
چند جمله‌ای مشخصه، ۱۷۰  
چند جمله‌ای وار میرا، ۷۸
- خارج قسمت، ۲۷  
خروجی، ۱۶۹  
دستگاه موجک، ۹۳  
دوگان، ۱۴۳
- روش فوریه، ۱۶۹  
روش‌های سازگار، ۱۱۲
- سری بطور یکنواخت همگرا، ۴۶  
سری توانی، ۳۳  
سری غالب، ۴۸  
سری فوریه، ۵۸  
سری معادل، ۲۲  
سری نامتناهی، ۱۸  
سری واگرا، ۱۸  
سری همگرا، ۱۸  
سری هندسی، ۲۷  
سری‌های متناوب، ۲۶