

نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی

و

سیستم‌های دینامیکی

دکتر حسین خیری

وحید دامن‌افشان

مهسا مقدم

وجیهه وفائی

ویراستاران

دکتر غلامرضا حجتی

دکتر کاظم قنبری

تقدیم به
همه آنهایی که می‌خواهند بیشتر بدانند.

فهرست مطالب

| ذ | پیش‌گفتار |
|----|--|
| ۱ | ۱ مفاهیم اولیه و مقدمات |
| ۲ | ۱.۱ مفاهیمی از توابع حقیقی |
| ۱۴ | ۲.۱ قضیه اساسی وجود و منحصر بفردی جواب |
| ۲۲ | ۳.۱ چند نکته و مثال |
| ۲۸ | ۴.۱ ادامه جواب‌ها |
| ۳۳ | ۵.۱ وابستگی جواب به شرایط اولیه و تابع f |
| ۳۹ | ۶.۱ مسائل |
| ۴۳ | ۲ سیستم معادلات دیفرانسیل |
| ۴۳ | ۱.۲ سیستم معادلات مرتبه اول |
| ۴۶ | ۲.۲ سیستم معادلات خطی |
| ۴۸ | ۱.۲.۲ سیستم معادلات خطی همگن |
| ۵۷ | ۲.۲.۲ سیستم معادلات خطی ناهمگن |
| ۶۲ | ۳.۲ محاسبه جواب سیستم معادلات با ضرایب ثابت |
| ۶۲ | ۱.۳.۲ حل سیستم معادلات با استفاده از فرم جردن |
| ۸۲ | ۲.۳.۲ حل سیستم معادلات با استفاده از تبدیل لاپلاس |
| ۸۵ | ۳.۳.۲ حل سیستم معادلات با استفاده از روش سیلویستر |
| ۸۸ | ۴.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام |
| ۹۳ | ۱.۴.۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n ام |
| ۹۷ | ۲.۴.۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبه n ام |
| ۹۸ | ۳.۴.۲ معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n ام با ضرایب ثابت |

ح فهرست مطالب

| | | |
|-----|---------------------------------------|-------|
| ۱۰۱ | مسائل | ۵.۲ |
| ۱۰۷ | مسائل مقدار مرزی و نظریه اشتورم | ۳ |
| ۱۰۷ | ویژگی‌های کیفی جواب‌ها | ۱.۳ |
| ۱۱۰ | معادلات خودالحاق از مرتبه دوم | ۲.۳ |
| ۱۱۴ | نتایج اساسی برای نظریه اشتورم | ۳.۳ |
| ۱۱۷ | قضیه‌های تفکیک و مقایسه | ۴.۳ |
| ۱۲۴ | مسائل | ۵.۳ |
| ۱۲۹ | سیستم‌های دینامیکی | ۴ |
| ۱۲۹ | منحنی‌های جواب و تصویر فاز | ۱.۴ |
| ۱۳۹ | سیستم‌های خودگردان در صفحه | ۲.۴ |
| ۱۴۴ | انواع نقاط تعادل | ۳.۴ |
| ۱۴۵ | پایداری نقاط تعادل | ۴.۴ |
| ۱۵۱ | تصویر فاز در صفحه | ۵.۴ |
| ۱۵۲ | رسم تصویر فاز با استفاده از محاسبات | ۱.۵.۴ |
| ۱۵۷ | رسم تصویر فاز با استفاده از هم‌شیب‌ها | ۲.۵.۴ |
| ۱۶۰ | شار و وضعیت | ۶.۴ |
| ۱۶۶ | مسائل | ۷.۴ |
| ۱۷۱ | سیستم‌های خطی | ۵ |
| ۱۷۱ | سیستم خطی متعارف | ۱.۵ |
| ۱۷۹ | تصاویر فاز سیستم‌های متعارف در صفحه | ۲.۵ |
| ۱۷۹ | سیستم‌های متعارف ساده | ۱.۲.۵ |
| ۱۹۰ | سیستم‌های متعارف غیرساده | ۲.۲.۵ |
| ۱۹۲ | سیستم‌های خطی ساده در صفحه | ۳.۵ |
| ۱۹۳ | تصویر فاز سیستم خطی ساده | ۱.۳.۵ |
| ۱۹۷ | دسته‌بندی سیستم‌های خطی ساده | ۲.۳.۵ |
| ۱۹۹ | عملگر وضعیت | ۴.۵ |
| ۲۰۲ | مسائل | ۵.۵ |
| ۲۰۹ | سیستم‌های غیرخطی در صفحه | ۶ |
| ۲۱۰ | رفتار موضعی و کلی | ۱.۶ |
| ۲۱۰ | خطی‌سازی در یک نقطه تعادل | ۲.۶ |

خ فهرست مطالب

| | | |
|-----|--|------|
| ۲۲۹ | بررسی پایداری نقاط تعادل با توابع لیاپانوف | ۳.۶ |
| ۲۴۱ | نقاط معمولی | ۴.۶ |
| ۲۴۲ | انتگرال‌های اولیه | ۵.۶ |
| ۲۴۵ | سیستم‌های همیلتونی | ۶.۶ |
| ۲۵۲ | نقاط حدی و دورهای حدی | ۷.۶ |
| ۲۵۸ | نگاشت پوانکاره | ۸.۶ |
| ۲۶۳ | نظریه پوانکاره-بندیکسون | ۹.۶ |
| ۲۶۹ | مسائل | ۱۰.۶ |

| | |
|-----|----------------------------|
| ۲۷۵ | مراجع |
| ۲۷۹ | واژه‌نامه فارسی به انگلیسی |
| ۲۸۵ | واژه‌نامه انگلیسی به فارسی |
| ۲۹۱ | نمایه |

پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد و اهمیت بسزای معادلات دیفرانسیل در کمک به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نیز نظر به اینکه کتاب‌های ریاضی که تاکنون به زبان فارسی در رابطه با موضوع نظریه معادلات، ترجمه یا تالیف شده است، نیازهای فعلی جامعه ریاضی و علمی را برآورده نمی‌کند، بر آن شدیم به تالیف کتاب حاضر بپردازیم.

سطح این کتاب، به گونه‌ای است که برای دانشجویان سال آخر دوره کارشناسی رشته ریاضی و دانشجویان کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی، فیزیک، مکانیک و سایر رشته‌های مرتبط، قابل استفاده می‌باشد.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه معادلات دیفرانسیل در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم، آورده شده است. همچنین، با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب، به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

کتاب حاضر از شش فصل تشکیل شده است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه مورد بررسی قرار گرفته و نیز قضیه اساسی وجودی و منحصر بفردی جواب بیان شده است.

در فصل دوم، مباحث و مطالب فصل اول، روی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسعه داده شده است. همچنین در این فصل، سه روش مختلف برای حل سیستم معادلات ارابه شده است. لازم به ذکر است که روش حل سیستم معادلات با استفاده از روش جردن، بیشتر برای دوره‌های کارشناسی ارشد آورده شده است. لذا برای دوره‌های کارشناسی می‌توان از مطالعه این روش، چشم‌پوشی کرد. در ادامه فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام و قضیه‌های مربوط به آن، بررسی شده است.

فصل سوم در ارتباط با مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم است. در این فصل، قضیه‌های اساسی در ارتباط با مسایل مقدار مرزی، از جمله قضیه مقایسه‌ای و قضیه تفکیک آورده شده است.

در فصل چهارم، سیستم‌های دینامیکی معرفی شده است. تعاریف و مفاهیم نقاط ثابت، پایداری نقاط ثابت و تصویر فاز، با بیانی ساده و روان ارائه شده است.

فصل پنجم، درباره سیستم‌های دینامیکی خطی در صفحه بحث می‌کند. به بیان دقیق‌تر، سیستم‌های خطی متعارف و سیستم‌های خطی ساده در صفحه، بیان و تصاویر فاز مربوط به آن‌ها مورد کاوش قرار گرفته است.

فصل ششم درباره سیستم‌های غیرخطی در صفحه است. در واقع این فصل، دربرگیرنده مطالب تکمیلی فصل پنجم است. بیشتر مطالب این فصل، برای دوره‌های تحصیلات تکمیلی مناسب است.

لازم به ذکر است که در جمع‌آوری مطالب فصل‌های اول، دوم و سوم از جزوه درسی استاد گرامی، آقای دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام، عضو هیات علمی گروه ریاضی کاربردی دانشگاه تبریز، نیز استفاده شده است. همچنین در این کتاب، از قواعد آیین نگارش کتاب دستور خط فارسی، مصوب فرهنگستان زبان و ادب فارسی، ویرایش سال ۸۴ استفاده شده است به این امید که گامی هر چند کوتاه در راه استواری پایه‌های زبان و خط فارسی باشد.

در پایان، از آقای دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم آذربایجان که در ابتدای راه با ما همکاری کردند، آقای دکتر مرتضی فغفور، عضو هیات علمی گروه ریاضی محض دانشگاه تبریز، به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌شان در استفاده از نرم‌افزار \LaTeX ، آقای دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام، به خاطر دلگرمی‌ها و راهنمایی‌هایشان، آقای دکتر کاظم قنبری، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه صنعتی سهند و آقای دکتر غلامرضا حجتی، عضو هیات علمی گروه ریاضی کاربردی دانشگاه تبریز به خاطر نگاه‌های تیزبینانه‌شان در هنگام ویراستاری کتاب و نیز از تمامی کسانی که به نحوی در امر آماده‌سازی و چاپ این کتاب، یاری‌گر ما بوده‌اند، سپاس‌گزاریم. امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

دکتر حسین خیری

وحید دامن‌افشان

مهسا مقدم

وجیهه وفائی

ضرایب آن، موهومی محض باشند. از طرف دیگر، یک سیستم غیرخطی می‌تواند دارای یک مسیر بسته منفرد باشد. بدین مفهوم که در نزدیکی این مسیر بسته، مسیرهای بسته دیگری واقع نباشند. مثال بعدی، این حالت را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۷.۶ سیستم غیرخطی

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}\quad (54.6)$$

را در نظر بگیرید. برای مطالعه این سیستم، از مختصات قطبی (r, θ) که در آن $x_1 = r \cos \theta$ و $x_2 = r \sin \theta$ استفاده می‌کنیم. با مشتق‌گیری از طرفین روابط $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ و $\theta = \tan^{-1}(x_2/x_1)$ نسبت به t ، روابط

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = r \dot{r}, \quad x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = r^2 \dot{\theta}$$

به دست می‌آید. با ضرب طرفین اولین معادله (۵۴.۶) در x_1 و ضرب طرفین دومین معادله آن در x_2 و جمع نتایج حاصل، داریم

$$\dot{r} = r(1 - r^2).$$

همین طور، با ضرب اولین معادله (۵۴.۶) در x_2 و طرفین دومین معادله آن در x_1 و کم کردن نتایج حاصل از هم،

$$\dot{\theta} = 1$$

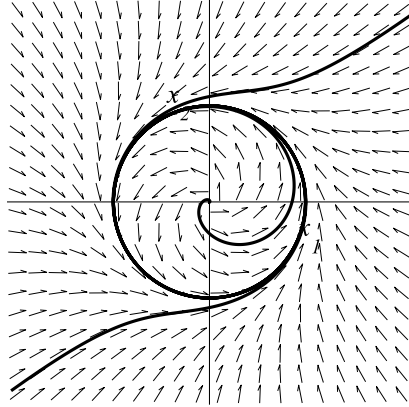
به دست می‌آید. بنابراین، در مختصات قطبی، سیستم (۵۴.۶) به صورت

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}\quad (55.6)$$

در می‌آید. به آسانی می‌توان این معادلات را جداگانه حل کرد و جواب عمومی سیستم (۵۵.۶) را به صورت

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \quad \theta = t + \theta_0.$$

یافت که در آن، θ_0 و c ثابت‌های دلخواه هستند. حال (۵۵.۶) را به لحاظ هندسی بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۹.۶ تصویر فاز سیستم (۵۴.۶).

۱. اگر $c = 0$ باشد، آنگاه جواب $r = 1$ و $\theta = t + \theta_0$ را داریم که نشان‌دهنده دایره $x^2 + y^2 = 1$ با جهتی مخالف حرکت عقربه‌های ساعت است.

۲. اگر $c > 0$ باشد، روشن است که $r < 1$ است و وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، r به دایره واحد میل می‌کند.

۳. اگر $c < 0$ باشد، می‌بینیم که $r > 1$ است و وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، r به دایره واحد نزدیک می‌شود.

این مشاهدات نشان می‌دهند که تنها یک مسیر بسته ($r = 1$) وجود دارد که وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، تمام مسیرهای دیگر، به طور حلزونی از داخل یا از خارج دایره $r = 1$ به آن میل می‌کنند. شکل ۱۹.۶ تصویر فاز سیستم (۵۴.۶) را نشان می‌دهد.

تعریف ۲.۷.۶ فرض کنید x نقطه‌ای در تصویر فاز از شار ϕ_t باشد. در این صورت،

• نقطه y را $(-w) - \alpha$ حد x گویند هرگاه دنباله $\{t_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که وقتی $t_n \rightarrow -\infty$ ($t_n \rightarrow +\infty$)، رابطه $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y$ برقرار باشد.

• مجموعه نقاطی که $(-w) - \alpha$ حد x هستند را مجموعه $(-w) - \alpha$ حد x گویند و با $L_\alpha(x)$ نشان می‌دهند.

مثال ۳.۷.۶ مثال ۱.۷.۶ را در نظر بگیرید. برای $x \neq 0$ ، $L_\alpha(x)$ و $L_w(x)$ را بیابید.

مراجع

- [1] S. S. Abdullaev, *Construction of Mappings for Hamiltonian Systems and Their Applications*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [2] M. L. Abell and J. P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica*, 3rd ed., Academic Press, New York, 2004.
- [3] M.A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, 1st ed., Springer-Verlag, 2008.
- [4] D.V. Anosov, V.I. Arnol'd (eds.), *Dynamical Systems I: Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Vol. 1, 1997.
- [5] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, Wiley, New York, 2005.
- [6] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [7] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical Systems*, Chapman and Hall, London, 1992.
- [8] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th ed., Wiley, New York, 2001.
- [10] R. Bronson and G. Costa, *Schaum's Outline of Differential Equations*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2006.
- [11] S. L. Campbell and R. Haberman, *Introduction to Differential Equations with Dynamical systems*, Princeton University Press, 2008.
- [12] B. N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1994.
- [13] R. L. Devaney, M. Hirsch, and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2nd ed., Academic Press, New York, 2003.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|-----------------------------------|------------------|
| Ideal pendulum | آونگ ایده‌ال |
| Extended solution | ادامه جواب |
| First integral | انتگرال اولیه |
| Eigenvector | بردار ویژه |
| -generalized | تعمیم یافته |
| Poincaré section | برش پوانکاره |
| Jordan block | بلوک جردن |
| Basis | پایه |
| -standard | استاندارد |
| Function | تابع |
| -Lyapunov | لیاپانوف |
| -weak | ضعیف |
| -strong | قوی |
| -continuously differential | مشتق‌پذیر پیوسته |
| -positive definite | معین مثبت |
| -negative definite | معین منفی |
| -positive semidefinite | نیم‌معین مثبت |
| -negative semidefinite | نیم‌معین منفی |
| -Hamiltonian | همیلتونی |
| Laplace transform | تبدیل لاپلاس |
| -inverse | معکوس |
| Restriction of the phase portrait | تحدید تصویر فاز |
| Phase portrait | تصویر فاز |
| -global | کلی |
| -local | موضعی |
| Lipschitz constant | ثابت لیپ‌شیتس |
| Separatrix | جداکننده |

نمایه

- آزمون همگرایی و ایراشتراس، ۷
آونگ ایده‌ال، ۲۴۹
- اثر ماتریس، ۱۷۳
انتگرال اولیه، ۲۴۲
اولین بازگشت نگاشت پوانکاره، ۲۵۸
- بردار
ویژه، ۶۳
تعمیم یافته، ۶۵
بردارهای
مستقل خطی، ۴۹
وابسته خطی، ۴۹
برش پوانکاره، ۲۵۸
بلوک جردن، ۶۹
- پایه
استاندارد، ۶۲
یک فضای برداری، ۶۲
- تابع
پیوسته، ۹
کراندار، ۹
لیاپانوف، ۲۲۹، ۲۴۰
ضعیف، ۲۳۲
قوی، ۲۳۲
معین مثبت، ۲۳۱
معین منفی، ۲۳۱
- نیم‌معین مثبت، ۲۳۱
نیم‌معین منفی، ۲۳۱
همبالتونی، ۲۴۵
تبدیل لاپلاس، ۸۲
تحدید تصویر فاز، ۲۱۰
تصویر فاز، ۱۳۴
کامل، ۲۱۰
کلی، ۲۱۰
موضعی، ۲۱۰
تکنیک خطی‌سازی، ۲۱۳
- ثابت لیپ‌شیتس، ۱۰
جعبه شار، ۲۴۱
جواب
توسیع یافته، ۳۰
خصوصی سیستم معادلات ناهمگن، ۶۰
عمومی سیستم معادلات ناهمگن، ۵۹
عمومی سیستم معادلات همگن، ۵۴
ماکزیمال مساله مقدار اولیه، ۳۱
مساله مقدار اولیه، ۱۴، ۴۴، ۸۹
معادله دیفرانسیل، ۸۸
معادله دیفرانسیل از مرتبه اول، ۱۴
مینیمال مساله مقدار اولیه، ۳۱
جواب‌های
اساسی، ۵۲
مستقل خطی، ۹۳